Smarandache 双阶乘对偶函数的恒等式

王　阳

(南阳师范学院 数学与统计学院，河南 南阳 473061)

摘　要: 探究了 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 与 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s}$ 的收敛性. 利用初等方法讨论了该级数与 Riemann Zeta-函数之间的关系，得到了一个有趣的恒等式.

关键词: Smarandache 双阶乘对偶函数; Riemann Zeta-函数; 级数; 恒等式

中图分类号: O 156.4　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1671 - 6132(2012) 12 - 0011 - 03

1　引言及结论

对任意给定的正整数 n，著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m，使得 n 整除 $m!$. 即

$$S(n) = \min\{m: m \in \mathbf{N}, n \mid m!\}.$$

关于 $S(n)$ 的性质，徐哲峰等人已在文献[1~3]中进行了研究. 2007 年，苟素首先在文献[4]中给出了 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 的定义. 即当正整数 n 为偶数时，$S^{**}(n)$ 为最大的正整数 $2m$，使得 $(2m)!!$ 整除 n; 当正整数 n 为奇数时，$S^{**}(n)$ 为最大的正整数 $2m-1$，使得 $(2m-1)!!$ 整除 n. 也就是

$$S^{**}(n) = \begin{cases} \max\{2m: (2m)!! \mid n, m \in \ _{+}\}, & n \text{ 为偶数;} \\ \max\{2m-1: (2m-1)!! \mid n, m \in \ _{+}\}, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

其中 $(2m)!! = 2\times4\times6\cdots\times(2m)$，$(2m-1)!! = 1\times3\times5\cdots\times(2m-1)$. 由定义可得 $S^{**}(1) = 1$，$S^{**}(2) = 2$，$S^{**}(3) = 3$，$S^{**}(4) = 2$，$S^{**}(5) = 1$，$S^{**}(6) = 2$，$S^{**}(7) = 1\cdots$ 关于 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 的性质已有学者进行了初步的研究. 其中文献[5]利用 $\sin^n x$ 的定积分与 $n!!$ 的关系研究了 $S^{**}(n)$ 的一次均值; 文献[6]利用 $\ln(n!!)$ 的渐近性质研究了 $S^{**}(n)$ 的二次均值，得到了 $\sum_{n\leqslant x}(S^{**}(n))^2$ 的渐近公式. 文献[7]探究了方程 $S^{**}(n) = n$，$(S^{**}(n))^2 = n$ 及 $S^{**}(n) = \varphi(n)$ ($\varphi(n)$ 为 Euler 函数) 的可解性，并用初等方法给出了方程的所有正整数解.

本文的主要目的是利用初等方法研究 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 与 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s}$ 的收敛性，探究了该级数与 Riemann Zeta-函数之间的关系，得到了一个重要的恒等式，也就是证明了如下定理.

定理　对任意的复数 s，当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s}$ 收敛，且有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\ln 2}{2^s}\left(1+\frac{2}{2^{2s}}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)^{-1} + \frac{2\ln 3}{3^s}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)^{-1},$$

其中，$\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta-函数，$\zeta'(s)$ 表示 $\zeta(s)$ 对复数 s 的导数.

推论 1　对任意的复数 s，当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，必有

$$\lim_{s\to1}\left((s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s}\right) = 1.$$

当 $s = 2,4$，我们有恒等式:

收稿日期: 2012 - 09 - 25

作者简介: 王阳(1962 -)，女，河南南阳人，教授，主要从事数论研究.

推论 2
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}+\frac{3\ln 2}{8}+\frac{\ln 3}{4},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^4}=\frac{90}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^4}+\frac{43\ln 2}{640}+\frac{\ln 3}{40}.$$

2　引理

为了完成定理的证明，我们需要下列引理.

引理 1　对任意的素数 p 及任意的正整数 α，我们有恒等式:

（1）当 $p=2$ 时，$S^{**}(p^\alpha)=\begin{cases}2, \alpha=1,2;\\ 4, \alpha\geqslant 3.\end{cases}$

（2）当 $p\geqslant 3$ 时，$S^{**}(p^\alpha)=\begin{cases}3, p=3;\\ 1, p>3.\end{cases}$

证明:（1）由 $S^{**}(n)$ 的定义知，当 $\alpha=1,2$ 时，必有 $S^{**}(2^\alpha)=2$. 当 $\alpha\geqslant 3$，因为 $2^\alpha=2^3\times 2^{\alpha-3}=(4)!!\times 2^{\alpha-3}$，设 $S^{**}(2^\alpha)=2m, m\in {}_+$，由 $S^{**}(n)$ 的最大值性可知 $S^{**}(2^\alpha)=2m\geqslant 4$. 假设 $S^{**}(2^\alpha)=2m>4$，则由定义知 $S^{**}(2^\alpha)=2m\geqslant 6$，所以 $(2m)!!=2\times 4\times 6\times\cdots\times(2m)$ 必有因子 3，即 $3\mid(2m)!!$，又 $(2m)!!\mid 2^\alpha$，故 $3\mid 2^\alpha$，此与 $(3,2^\alpha)=1$ 矛盾. 因此，当 $\alpha\geqslant 3$ 时，$S^{**}(2^\alpha)=2m=4$.

（2）当 $\alpha\geqslant 1$ 时，设 $S^{**}(3^\alpha)=2h-1, h\in {}_+$. 因为 $3^\alpha=(3)!!\times 3^{\alpha-1}$，由 $S^{**}(n)$ 的最大值性可知 $S^{**}(3^\alpha)=2h-1\geqslant 3$. 假设 $S^{**}(3^\alpha)>3$，则奇数 $2h-1=S^{**}(3^\alpha)\geqslant 5$，所以 $(2h-1)!!=1\times 3\times 5\cdots\times(2h-1)$ 必有因子 5，即 $5\mid(2h-1)!!$，由定义知 $(2h-1)!!\mid 3^\alpha$，故 $5\mid 3^\alpha$，此与 $(5,3^\alpha)=1$ 矛盾. 因此，当 $\alpha\geqslant 1$ 时，$S^{**}(3^\alpha)=3$. 同理可证，当 $\alpha\geqslant 1, p>3$ 时，$S^{**}(p^\alpha)=1$. 即引理 1 得证.

引理 2[8]　对任意的复数 s，当 $\mathrm{Re}\, s>1$ 时，我们有恒等式:
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_{p}\frac{\ln p}{p^s-1},$$
其中，$\sum_{p}$ 表示对所有的素数 p 求和.

我们不难发现: $S^{**}(2+3)\neq S^{**}(2)+S^{**}(3)$，$S^{**}(2\times 3)\neq S^{**}(2)S^{**}(3)$. 因此 $S^{**}(n)$ 既不可加也不可乘. 即当正整数 m, n 互素时，$S^{**}(m+n)=S^{**}(m)+S^{**}(n)$，$S^{**}(mn)=S^{**}(m)S^{**}(n)$ 不一定成立. 所以我们不能使用常用的 Euler 求和法探究 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s}$ 与 Riemann Zeta-函数之间的关系.

3　定理的证明

由 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 的定义知，对于任意的正整数 n，
$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & n=p^\alpha, \alpha\geqslant 1, p \text{ 为素数};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$
对任意的复数 s，当 $\mathrm{Re}\, s>1$ 时，由 $S^{**}(n)<<\ln n$ 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s}$ 收敛.

根据引理 1 我们可得
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s}=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{\Lambda(p^\alpha)S^{**}(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{S^{**}(p^\alpha)\ln p}{p^{\alpha s}}=$$
$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{S^{**}(2^\alpha)\ln 2}{2^{\alpha s}}+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{S^{**}(3^\alpha)\ln 3}{3^{\alpha s}}+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p>3}\frac{S^{**}(p^\alpha)\ln p}{p^{\alpha s}}=$$
$$\left(\frac{2}{2^s}+\frac{2}{2^{2s}}\right)\ln 2+\sum_{\alpha=3}^{\infty}\frac{4\ln 2}{2^{\alpha s}}+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{3\ln 3}{3^{\alpha s}}+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p>3}\frac{\ln p}{p^{\alpha s}}=$$
$$\frac{2\ln 2}{2^s}\left(1+\frac{1}{2^s}\right)+\frac{4\ln 2}{2^{3s}}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)^{-1}+\frac{3\ln 3}{3^s}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)^{-1}+\sum_{p>3}\frac{\ln p}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=$$
$$\sum_{p}\frac{\ln p}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}+\frac{\ln 2}{2^s}\left(1+\frac{2}{2^{2s}}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)^{-1}+\frac{2\ln 3}{3^s}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)^{-1}.$$

结合引理 2 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s}=-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{\ln 2}{2^s}\left(1+\frac{2}{2^{2s}}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)^{-1}+\frac{2\ln 3}{3^s}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)^{-1}.$$

即定理得证.

下面我们证明推论. 首先,证明推论 1.

由文献 [9] 知,当复数 $s\neq\rho, s\neq-1$ 及 $s\neq-2n(n=1,2,\cdots)$ 时,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\frac{1}{s-1}-1+\frac{1}{2}\lg 3\pi+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right),$$

其中右边的两个级数分别在任一不包含 $\zeta(s)$ 的非显然零点 ρ 和显然零点 $-2n(n=1,2,\cdots)$ 的有限闭域上一致收敛.

所以

$$\lim_{s\to1}\left((s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)=-1.$$

由定理可得: 对任意的复数 s,当 $\mathrm{Re}\, s>1$ 时,

$$\lim_{s\to1}\left((s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s}\right)=-\lim_{s\to1}\left((s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)=1.$$

即推论 1 得证.

最后证明推论 2. 当 $s=2,4$ 时,由文献 [10] 知:

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\zeta'(2)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2},\zeta'(4)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^4}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}+\frac{3\ln 2}{8}+\frac{\ln 3}{4},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^4}=\frac{90}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^4}+\frac{43\ln 2}{640}+\frac{\ln 3}{40}.$$

即推论 2 得证.

参　考　文　献

[1] 徐哲峰. Smarandache 函数的均值分布性质 [J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.

[2] Lu Zhongtian. On the Smarandache function and its mean value [J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 104-108.

[3] Li Xiaoyan, Xue yanrong. On an equation related to function $S(n)$ [J]. Scientia Magna, 2008, 4(1): 148-151.

[4] 荀素, 杜晓英. 关于 Smarandache 对偶函数 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(1): 17-20.

[5] 杨衍婷. 一个数论函数的均值问题 [J]. 黑龙江大学学报: 自然科学版, 2008, 25(3): 340-342.

[6] Wang Yang. On the quadratic mean vale of the Smarandache dual function $S^{**}(n)$ [C]. Research on Number Theory and Smarandache notions. Hexis, 2009: 109-115.

[7] 王阳. 与 Smarandache 双阶乘对偶函数有关的方程 [J]. 南阳师范学院学报, 2010, 9(3): 1-3.

[8] 周焕芹. 关于 Smarandache 函数与 Riemann Zeta-函数 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(1): 41-44.

[9] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1999: 158-159.

[10] Tom M A. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976: 237.

An identity of the Smarandache double factorial dual function

WANG Yang

(*School of Mathematics and Statistics*, *Nanyang Normal University*, *Nanyang* 473061, *China*)

Abstract: The convergent property of series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s}$ is studied, which combines with the Smarandache double factorial dual function $S^{**}(n)$ and Mangoldt function $\Lambda(n)$. The relationship between the series and the Riemann Zeta-function is discussed, an interesting identity is obtained by using elementary methods.

Key words: Smarandache double factorial dual function; Riemann Zeta-function; series; identity